Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluţii

BARAJUL al VII-lea

Problemă. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A^3-2\cdot A^2+10\cdot A=\begin{pmatrix}18 & 4\\ 9 & 2\end{pmatrix}$.

Soluţie: $A\cdot\left(A^2-2\cdot A+10\cdot I_2\right)=\begin{pmatrix}18 & 4\\ 9 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det A\cdot\det\left(A^2-2\cdot A+10\cdot I_2\right)=0.$

Presupunând $\det\left(A^2-2\cdot A+10\cdot I_2\right)=0\Rightarrow \det\left(A-(1+3i)\cdot I_2\right)\cdot\det\left(A-(1-3i)\cdot I_2\right)=0$.

Dacă $P(X)=\det\left(A-X\cdot I_2\right)\in\mathbb{R}[X]$ este polinomul caracteristic al lui A, deducem $P(1+3i)=0$ sau $P(1-3i)=0$. Dar $P(X)\in\mathbb{R}[X]\Rightarrow P(1+3i)=P(1-3i)=0.$ Prin urmare $P(X)=X^2-2X+10.$ Aplicând teorema Cayley-Hamilton, obţinem

$A^2-2\cdot A+10\cdot I_2=O_2\Rightarrow A^3-2\cdot A^2+10\cdot A=O_2(fals)\Rightarrow \det A=0.$

Trebuie să avem $A^2=\lambda\cdot A,\lambda=TrA\Rightarrow A^3=\lambda^2\cdot A.$

Relaţia din enunţ devine

$$\left(\lambda^2-2\lambda+10\right)\cdot A=\begin{pmatrix}18 & 4\\ 9 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda^3-2\lambda^2+10\cdot\lambda=20\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow A=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}18 & 4\\ 9 & 2\end{pmatrix}.$$

Răspuns: $A=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}18 & 4\\ 9 & 2\end{pmatrix}$